



Фильтр, согласованный с аберрациями, для анализа топологического заряда вихревого пучка

П. А. Хорин¹, С. Н. Хонина^{1,2}

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Россия

² ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, г. Самара, Россия

Известно, что для анализа топологического заряда вихревого пучка используется астигматическое преобразование. В данной работе для осуществления астигматических преобразований вихревых пучков используется многоканальный фильтр, согласованный с различными аберрациями, описываемыми полиномами Цернике. Такой фильтр позволяет внести в анализируемый вихревой пучок сразу несколько волновых аберраций различного типа и уровня для осуществления различных аберрационных преобразований, включая астигматизм. При этом в фокальной плоскости в различных дифракционных порядках формируется набор аберрационно-преобразованных распределений анализируемого вихревого пучка, что облегчает определение его топологического заряда.

Ключевые слова: вихревые пучки, топологический заряд, волновые аберрации, моды Лагерра-Гаусса, моды Эрмита-Гаусса

Статья получена: 26.07.2022

Статья принята: 15.08.2022

ВВЕДЕНИЕ

Вихревые пучки [1-2] обладают орбитальным угловым моментом [3-4], который определяется порядком оптического вихря, который также называется топологическим зарядом (ТЗ). Отличительной

Aberration-Matched Filter for the Topological Vortex Charge Analysis

P. A. Khorin¹, S. N. Khonina^{1,2}

¹ Samara National Research University, Samara, Russia

² Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC «Crystallography and Photonics» RAS, Samara, Russia

It is well-known that the astigmatic transformation is used to analyze the topological vortex charge. In this paper, a multi-order filter matched to various aberrations described by the Zernike polynomials is used to implement the astigmatic transformations of vortex beams. Such a filter makes it possible to simultaneously introduce several wave aberrations with various types and levels into the analyzed vortex beam in order to implement various aberrational transformations, including astigmatism. In this case, a set of aberration-transformed distributions of the analyzed vortex beam is formed in the focal plane in different diffracting orders that facilitates determination of its topological charge.

Keywords: vortex beams, topological charge, wave aberrations, Gaussian-Laguerre modes, Hermite-Gaussian modes

Received on: July 26, 2022

Accepted on: August 15, 2022

1. INTRODUCTION

Vortex beams [1-2] have an orbital angular momentum [3-4] determined by the optical vortex order of the optical vortex that is also called the topological charge (TC). A distinctive feature of a vortex optical beam is availability of phase singular points at which the phase is not determined and the amplitude is equal to zero. Multiplexing of several vortex beams in one physical carrier makes it possible to significantly increase the amount of information transmitted [5-6].

There are various methods for determining the vortex beam TC based on the matched filtering [7-8],

особенностью вихревого оптического пучка является наличие фазовых сингулярных точек, в которых фаза не определена, а амплитуда равна нулю. Мультиплексирование нескольких вихревых пучков в одном физическом носителе позволяет существенно увеличить объем передаваемой информации [5-6].

Известны различные способы определения ТЗ вихревого пучка, основанные на согласованной фильтрации [7-8], применении специальных элементов, обеспечивающих сортировку луча [9-10], а также астигматическом преобразовании [11-12]. Астигматическое преобразование можно реализовать при помощи цилиндрической или наклонной линзы [11-12], с использованием анизотропных кристаллов [13-14], а также при дифракции на криволинейной дифракционной решетке [15-16].

В данной работе рассматривается метод прямого внесения волновой aberrации, в том числе астигматизма, в исследуемый волновой фронт с использованием многоканального фильтра, согласованного с набором функций Цернике [17-19]. Такой фильтр позволяет внести в анализируемый вихревой пучок сразу несколько волновых aberrаций различного типа и уровня для осуществления различных aberrационных преобразований. При этом в фокальной плоскости в различных дифракционных порядках формируется набор aberrационно преобразованных распределений анализируемого вихревого пучка, что облегчает определение его топологического заряда.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Для внесения aberrаций в исследуемый пучок рассмотрим многоканальный фильтр [17-19], согласованный с aberrациями различного типа и веса:

$$\tau(x,y) = \sum_{N=1}^{N_0} \sum_{k=1}^{K_0} \left\{ \exp[ik\alpha_k Z_N(x,y)] \exp[i(a_{kN}x + b_{kN}y)] \right\}, \quad (1)$$

где N_0 – количество каналов фильтра, соответствующих типам aberrаций; K_0 – количество каналов фильтра, соответствующих весам aberrаций; $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, λ длина волны излучения, α_k – величина волновой aberrации; Z_N – круговые полиномы Цернике; a_{kN}, b_{kN} – параметры пространственной несущей вдоль оси X и Y.

Круговые полиномы Цернике представляют собой полное множество ортогональных функций с угловыми гармониками в круге радиуса r_0 [20-22]:

$$Z_N(r,\varphi) = Z_{nm}(r,\varphi) = A_n R_n^m(r) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases}, \quad (2)$$

use of special elements providing the beam sorting [9-10], as well as astigmatic transformation [11-12]. Astigmatic transformation can be implemented using a cylindrical or oblique lens [11-12], using the anisotropic crystals [13-14], and using the diffraction on a curvilinear diffraction grating [15-16].

In this paper, we consider a method for direct introduction of wave aberration, including astigmatism, into the wavefront under study using a multi-order filter matched to the set of Zernike functions [17-19]. Such a filter makes it possible to simultaneously introduce several wave aberrations with various types and levels into the analyzed vortex beam in order to implement various aberrational transformations. In this case, a set of aberration-transformed distributions of the analyzed vortex beam is formed in the focal plane in different diffracting orders that facilitates determination of its topological charge.

2. THEORETICAL BACKGROUND

In order to introduce aberrations into the beam under study, we consider a multi-order filter [17-19] matched to aberrations with various types and weights:

$$\tau(x,y) = \sum_{N=1}^{N_0} \sum_{k=1}^{K_0} \left\{ \exp[ik\alpha_k Z_N(x,y)] \exp[i(a_{kN}x + b_{kN}y)] \right\}, \quad (1)$$

where N_0 is the number of filter channels corresponding to the types of aberrations; K_0 is the number of filter channels corresponding to the aberration

Таблица 1. Тригонометрическое представление нескольких первых базисных функций Цернике в полярной системе координат.

Table 1. Trigonometric representation of several first basis Zernike functions in the polar coordinate system.

N	n	m	Вид aberrации	Представление в полярной системе координат
1	1	1	Дисторсия	$2r \cos(\varphi)$
2	2	2	Астигматизм	$\sqrt{6}r^2 \cos(2\varphi)$
3	2	0	Дефокусировка	$\sqrt{3}(2r^2 - 1)$
4	3	3	Трилистник	$2\sqrt{2}r^3 \cos(3\varphi)$
5	3	1	Кома	$2\sqrt{2}(3r^3 - 2r) \cos(\varphi)$
6	4	4	Четырехлистник	$\sqrt{10}r^4 \cos(4\varphi)$
7	4	2	Астигматизм 2-го порядка	$\sqrt{10}(4r^4 - 3r^2) \cos(2\varphi)$
8	4	0	Сферическая	$\sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1)$



где $R_n^m(r)$ – радиальные полиномы Цернике, A_n – нормирующий множитель:

$$R_n^m(r) = \sum_{p=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^p (n-p)!}{p! \left(\frac{n+m}{2}-p\right)! \left(\frac{n-m}{2}-p\right)!} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2p},$$

$$A_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}. \quad (3)$$

Очевидно, функции Цернике $(n, m) = (2, \pm 2)$ связаны с астигматическими aberrациями [11-12]:

$$Z_{2,2}(r, \varphi) = c_{2,2} r^2 \cos(2\varphi) = c_{2,2} [r^2 \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi)] = c_{2,2} (x^2 - y^2),$$

$$Z_{2,-2}(r, \varphi) = c_{2,-2} r^2 \sin(2\varphi) = c_{2,-2} [r \cos(\varphi) r \sin(\varphi)] = c_{2,-2} xy. \quad (4)$$

Функции Цернике более высоких порядков $(n, m) = (n, \pm 2)$ также будут содержать астигматическое слагаемое. Например:

$$Z_{4,2}(r, \varphi) = c_{4,2} (4r^4 - 3r^2) \cos(2\varphi) = c_{4,2} [4r^4 \cos(2\varphi) - 3r^2 \cos(2\varphi)] = c_{4,2} \{4r^2 [r^2 \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi)] - 3[r^2 \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi)]\} = c_{4,2} (4r^2 - 3)(x^2 - y^2). \quad (5)$$

Как видно, астигматизм 2-го порядка включает произведение астигматической части и радиально-симметричной aberrации, соответствующей дефокусировке.

Таким образом, можно говорить о возможности использования астигматически подобных волновых aberrаций разного веса для анализа топологического заряда вихревого пучка.

В качестве анализируемого вихревого пучка рассматриваются моды Лагерра-Гаусса [23-25]:

$$GL_n^m(r, \varphi) = K_{nm} (\sqrt{2} r / \sigma)^m L_n^m((r/\sigma)^2) \exp[im\varphi], \quad (6)$$

где $L_n^m(x) = 1/n(2n+m-1-x) L_{n-1}^m(x) - (n+m-1) L_{n-2}^m(x)$ – полином Лагерра, заданный рекуррентной формулой, где $L_0^m(x) = \exp(-x^2/2)$, $L_1^m(x) = (1+m-x)\exp(-x^2/2)$.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

На основе численного моделирования действия многоканального фильтра (1), согласованного с фазовыми функциями Цернике, показана возможность визуализации топологического заряда при помощи aberrаций типа $(n, 2)$ с различным весом.

weights; $\kappa = 2\pi/\lambda$ is a wave number, λ is a radiation wavelength, α_k is a wave aberration value; Z_N are the Zernike polynomials; a_{kN}, b_{kN} are the spatial carrier parameters along the X and Y axes.

The Zernike polynomials are the complete set of orthogonal functions with angular harmonics in a circle of radius r_0 [20-22]:

$$Z_N(r, \varphi) = Z_{nm}(r, \varphi) = A_n R_n^m(r) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases}, \quad (2)$$

where $R_n^m(r)$ are the radial Zernike polynomials, A_n is the normalizing factor:

$$R_n^m(r) = \sum_{p=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^p (n-p)!}{p! \left(\frac{n+m}{2}-p\right)! \left(\frac{n-m}{2}-p\right)!} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2p},$$

$$A_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}. \quad (3)$$

Obviously, the Zernike functions $(n, m) = (2, \pm 2)$ are related to the astigmatic aberrations [11-12]:

$$Z_{2,2}(r, \varphi) = c_{2,2} r^2 \cos(2\varphi) = c_{2,2} [r^2 \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi)] = c_{2,2} (x^2 - y^2),$$

$$Z_{2,-2}(r, \varphi) = c_{2,-2} r^2 \sin(2\varphi) = c_{2,-2} [r \cos(\varphi) r \sin(\varphi)] = c_{2,-2} xy. \quad (4)$$

The higher order Zernike functions $(n, m) = (n, \pm 2)$ will also contain an astigmatic summand. For example:

$$Z_{4,2}(r, \varphi) = c_{4,2} (4r^4 - 3r^2) \cos(2\varphi) = c_{4,2} [4r^4 \cos(2\varphi) - 3r^2 \cos(2\varphi)] = c_{4,2} \{4r^2 [r^2 \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi)] - 3[r^2 \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi)]\} = c_{4,2} (4r^2 - 3)(x^2 - y^2). \quad (5)$$

As one can see, the 2nd order astigmatism includes the product of astigmatic part and the radially symmetrical aberration corresponding to defocusing.

Thus, we can speak about the possible use of astigmatic-like wave aberrations with different weights to analyze the topological charge of a vortex beam. The following Gaussian-Laguerre modes are considered as the analyzed vortex beam [23-25]:

$$GL_n^m(r, \varphi) = K_{nm} (\sqrt{2} r / \sigma)^m L_n^m((r/\sigma)^2) \exp[im\varphi], \quad (6)$$

where $L_n^m(x) = 1/n(2n+m-1-x) L_{n-1}^m(x) - (n+m-1) L_{n-2}^m(x)$ is the Laguerre polynomial given by the recurrent formula, where $L_0^m(x) = \exp(-x^2/2)$, $L_1^m(x) = (1+m-x)\exp(-x^2/2)$.

При попадании на оптический элемент $\tau(x,y)$ (1) некоторого поля $f(x,y)$ будет формироваться распределение, комплексная амплитуда которого может быть рассчитана вдоль оптической оси в условиях применимости приближения Френеля (параксиальное приближение). Преобразование Френеля представляет собой разложение по параболическим волнам:

$$U(u,v,z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp[ikz] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \exp\left[\frac{ik}{2z}((x-u)^2 + (y-v)^2)\right] dx dy, \quad (7)$$

при условии, что $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \ll z$, z - расстояние, на которое распространён волновой фронт. Преобразование Френеля (\mathfrak{F}) может быть реализовано через преобразование Фурье (\mathfrak{S}) следующим образом:

$$\begin{aligned} U(u,v,z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \exp[-2\pi i(xu + yv)] dx dy = \\ &= \mathfrak{S}\left\{f(x,y) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right]\right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где преобразование Фурье имеет вид:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \exp[-2\pi i(xu + yv)] dx dy = \mathfrak{S}\{f(x,y)\}. \quad (9)$$

Рассмотрим действие фильтра (1) для вихревого пучка Гаусса Лагерра с топологическим зарядом $m=1$ и $m=3$. Подадим на многоканальный дифракционный элемент (1) поле $f(x,y) = GL_{0m}(x,y, \sigma=0,15)$. В табл. 2 представлены амплитуда и фаза входного поля $f(x,y)$ и действие фильтра $\tau(x,y)$ (1) в фокальной плоскости.

Из табл. 2 видно, что фильтр, согласованный с aberrациями различного веса и типа $Z_{n,\pm 2}$, позволяет уверенно детектировать топологический заряд вихревого пучка. Появляется возможность варьировать уровень визуализации топологического заряда (расстояние между экстремумами распределения интенсивности в конкретном дифракционном порядке) благодаря изменению параметра, отвечающего за уровень волновой aberrации α_w .

Таким образом предложенный фильтр превосходит простой метод анализа топологического заряда при помощи классических астигматических преобразований. Уверенное детектирование удается достигнуть при помощи волновых aberrаций типа $Z_{n,\pm 2}$ при $n \leq 6$.

Кроме того, в рамках данной работы рассматривается действие фильтра (1) для aberrаций до 4 порядка ($K_0=1$, $\alpha_k=1$). Рассмотрим, как различные aberrации влияют на структуру функции рассеяния точки

3. NUMERICAL SIMULATION

The possible visualization of a topological charge using the aberrations of $(n, 2)$ type with various weights is shown on the basis of numerical simulation of the multi-order filter (1) matched to the Zernike phase functions,

Covering by a certain field $f(x,y)$ of the optical element $\tau(x,y)$ (1) leads to a distribution, the complex amplitude of which can be calculated along the optical axis under the conditions of the applicable Fresnel approximation (paraxial approximation). The Fresnel transformation is an expansion in parabolic waves:

$$U(u,v,z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp[ikz] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \exp\left[\frac{ik}{2z}((x-u)^2 + (y-v)^2)\right] dx dy, \quad (7)$$

provided that $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \ll z$, z is the distance covered by the wavefront. The Fresnel transformation (\mathfrak{F}) can be implemented through the Fourier transformation (\mathfrak{S}) as follows:

$$\begin{aligned} U(u,v,z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \exp[-2\pi i(xu + yv)] dx dy = \\ &= \mathfrak{S}\left\{f(x,y) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right]\right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

where the Fourier transformation has the following form:

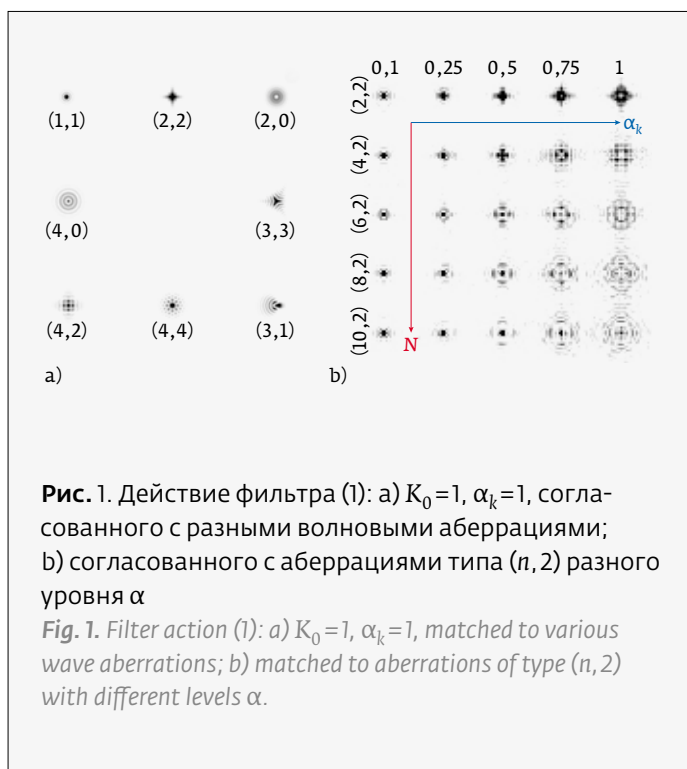
$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \exp[-2\pi i(xu + yv)] dx dy = \mathfrak{S}\{f(x,y)\}. \quad (9)$$

Let us consider the action of filter (1) for a Gaussian-Laguerre vortex beam with the topological charge $m=1$ and $m=3$. We will apply a field $f(x,y) = GL_{0m}(x,y, \sigma=0,15)$ to the multichannel diffractive element (1). Table 2 shows the amplitude and phase of the input field $f(x,y)$ and action of the filter $\tau(x,y)$ (1) in the focal plane.

It can be seen from Table 2 that the filter matched to the aberrations of various weights and types $Z_{n,\pm 2}$ makes it possible to reliably detect the topological charge of the vortex beam. It becomes possible to vary the visualization level of the topological charge (distance between the intensity distribution extremes in a particular diffraction order) by changing the parameter responsible for the wave aberration level α_w .

Thus, the proposed filter outperforms the simple method of topological charge analysis using the classical astigmatic transformations. Reliable detection can be achieved using the wave aberrations of $Z_{n,\pm 2}$ type at $n \leq 6$.

In addition, this paper describes action of the filter (1) for aberrations up to the 4th order ($K_0=1$, $\alpha_k=1$). Let us consider the effect of various aberrations on the point spread function structure of a vortex beam.



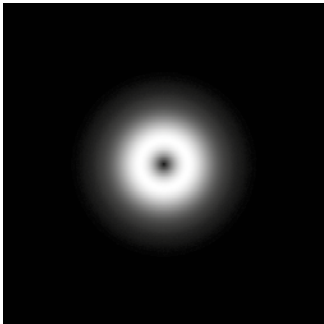
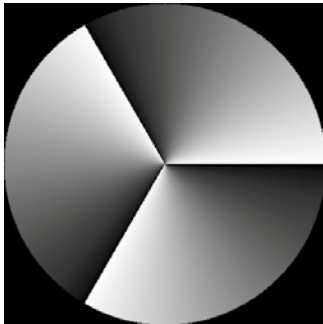
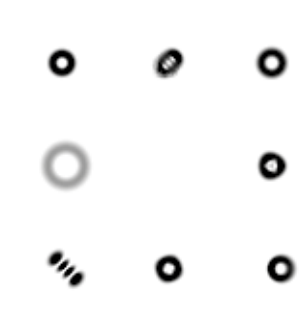
It is assumed that aberrations other than astigmatic-like ones will not significantly change the diffraction spot structure in the resulting filter plane when it is illuminated by a vortex beam. This means that the astigmatic-like aberrations will be well detected using a filter matched to the optical vortices.

Table 3 shows the input field and action of the filter (1) at $\tau(x,y)$, $K_0=1$, $\alpha_k=1$, $Z_N(x,y)=Z_{nm}(x,y)$, matched to various types of aberrations (location of diffraction orders with the encoded wave aberrations is shown in Fig. 1(a)). It can be seen from the intensity distribution in the focal filter plane that the aberrations other than astigmatism (Z_{22} and Z_{42}) do not significantly affect any changes in the diffraction spot structure of the vortex beam (an annular shape is retained). In turn, the astigmatic wave aberrations transform the Gaussian-Laguerre modes into the Hermite-Gaussian modes [26–28], and a vortex beam with a topological charge q is transformed into the Hermite-Gaussian modes at $(n, m)=(0, q)$. In other words, the topological charge of the vortex beam given by the complex distribution phase, is visualized in the intensity of the resulting filter plane.

Таблица 2. Действие фильтра (1) при анализе топологического заряда вихревого пучка
Table 2. Filter action (1) during analysis of the topological charge of a vortex beam

Входное поле		Действие фильтра	
$f(x,y) = GL_{0m}(x,y, \sigma = 0.15)$		$\tau_1(x,y)$ $Z_N(x,y) = Z_{n,2}(x,y)$	$\tau_2(x,y)$ $Z_N(x,y) = Z_{n,-2}(x,y)$
Амплитуда	Фаза	Интенсивность	

Таблица 3. Действие фильтра (1) при анализе топологического заряда вихревого пучка
Table 3. Filter action (1) during analysis of the topological charge of a vortex beam

Входное поле		Действие фильтра
$f(x,y) = GL_{03}(x,y, \sigma = 0.15)$		$\tau(x,y), K_0=1, \alpha_k=1$ $Z_N(x,y) = Z_{nm}(x,y)$
Амплитуда	Фаза	Интенсивность
		

вихревого пучка. Предполагается, что aberrации, отличные от астигматически подобных, не будут выражено изменять структуры дифракционных пятен в результирующей плоскости фильтра при освещении его вихревым пучком. Это значит, что именно астигматически подобные aberrации будут хорошо обнаруживаться с использованием фильтра, согласованного с оптическими вихрями.

В табл. 3 представлено входное поле и действие фильтра (1) при $\tau(x,y)$, $K_0=1$, $\alpha_k=1$, $Z_N(x,y) = Z_{nm}(x,y)$, согласованного с разными видами aberrации (расположение дифракционных порядков с закодированными волновыми aberrациями указано на рис. 1(a)). Из распределения интенсивности в фокальной плоскости фильтра видно, что aberrации, отличные от астигматизма (Z_{22} и Z_{42}), незначительно влияют на изменение структуры дифракционных пятен вихревого пучка (сохраняется кольцеобразная форма). В свою очередь, астигматические волновые aberrации преобразуют моды Лагерра-Гаусса в моды Эрмита-Гаусса [26–28], а вихревой пучок с топологическим зарядом q – в моды Эрмита-Гаусса при $(n,m)=(0,q)$. Другими словами, топологический заряд вихревого пучка, который задается фазой комплексного распределения, визуализируется в интенсивности результирующей плоскости фильтра.

Таким образом, можно говорить об инвариантности вихревых пучков к aberrациям до 4-го порядка, за исключением астигматизма различной степени, с точностью до внешней кольцеобразной формы (контура) дифракционных пятен.

Учитывая полученные связи полиномов Цернике и известных астигматический преобразований,

Thus, we can speak about the invariance of vortex beams to the aberrations up to the 4th order, except for astigmatism of various degrees, with an accuracy of the outer annular shape (contour) of diffraction spots.

Having considered the obtained connections between the Zernike polynomials and well-known astigmatic transformations, it becomes possible to expand the range of tools for topological charge analysis and

select the most successful ones for various problems. In general, the astigmatic transformation can be represented as $G(x,y) = (x \pm y)^{2t}$ и $G(x,y) = x^{2t} \pm y^{2d}$, where t and d are the astigmatic transformation order, and the sign affects the rotation angle. The exception is spherical aberration $x^2 + y^2$.

The astigmatic transformations being the superpositions of radially symmetric Zernike and $Z_{n,\pm 2}$ polynomials, make it possible to reliably detect the topological charge of a vortex beam. $G(x,y) = [x^2; y^2; x^2 - y^2; (x-y)^2; (x+y)^2]$ and $G(x,y) = [xy; x^4 - y^4; x^6 - y^6; (x+y)^4; (x+y)^6]$ are among these transformations. Thus, the astigmatic transformation in general form $(x \pm y)^{2t}$ and $x^{2t} \pm y^{2d}$ makes sense for $0 \leq t \leq 2$ and $0 \leq d \leq 2$.

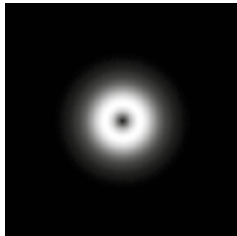
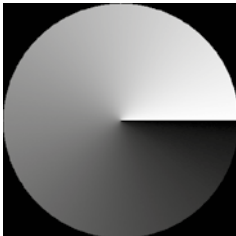
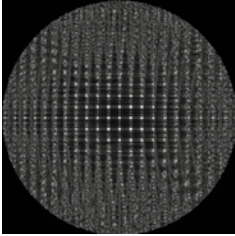
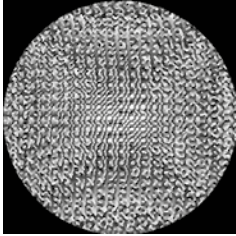
In order to verify the proposed transformations, let us analyze a Gaussian-Laguerre vortex beam with a topological charge $q=1$ and $q=3$. For ease of data presentation, we use the calculated filters $\tau_1(x,y)$, $\tau_2(x,y)$, $\tau_3(x,y)$, $\tau_4(x,y)$. The filter action modeling results are given in Tables 4 and 5.

Table 5 shows that the astigmatic transformations being the superpositions of radially symmetric Zernike and $Z_{n,\pm 2}$ polynomials, make it possible to reliably detect the topological charge of a vortex beam of both low and high order. We can distinguish $G(x,y) = [xy; x^2; y^2; x^2 - y^2; (x-y)^2; (x+y)^2]$ among the transformations, and Zernike polynomials with a radial index $n \leq 6$ among the astigmatic aberrations.

CONCLUSION

This paper represents a study of the possible detection and analysis of the topological charge of a vortex beam by introducing aberrations of various types and levels

Таблица 4. Действие фильтра (1), где Z_N заменено на $G(x, y)$ при анализе топологического заряда вихревого пучка
Table 4. Filter action (1), where Z_N is replaced by $G(x, y)$ during analysis of the topological charge of a vortex beam

Входное поле		Фильтр		Действие фильтра																																																							
Амплитуда	Фаза	Амплитуда	Фаза	Интенсивность																																																							
$f(x, y) = GL_{01}(x, y, \sigma = 0.15)$		$\tau_3(x, y)$ $G(x, y) = [x^2; y^2; x^2 - y^2; (x - y)^2; (x + y)^2]$		$\Im\{\tau_j(x, y)\}$																																																							
				<table border="0"> <tr> <td>0,1</td><td>0,25</td><td>0,5</td><td>0,75</td><td>1</td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>x^2</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>y^2</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>$x^2 - y^2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>$(x - y)^2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>$(x + y)^2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> </table>	0,1	0,25	0,5	0,75	1						x^2										y^2										$x^2 - y^2$										$(x - y)^2$										$(x + y)^2$				
0,1	0,25	0,5	0,75	1																																																							
x^2																																																											
y^2																																																											
$x^2 - y^2$																																																											
$(x - y)^2$																																																											
$(x + y)^2$																																																											
		$\tau_4(x, y)$ $G(x, y) = [xy; x^4 - y^4; x^6 - y^6; (x + y)^4; (x + y)^6]$		<table border="0"> <tr> <td>0,1</td><td>0,25</td><td>0,5</td><td>0,75</td><td>1</td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>xy</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>$x^4 - y^4$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>$x^6 - y^6$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>$(x + y)^4$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>$(x + y)^6$</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> </table>	0,1	0,25	0,5	0,75	1						xy										$x^4 - y^4$										$x^6 - y^6$										$(x + y)^4$										$(x + y)^6$				
0,1	0,25	0,5	0,75	1																																																							
xy																																																											
$x^4 - y^4$																																																											
$x^6 - y^6$																																																											
$(x + y)^4$																																																											
$(x + y)^6$																																																											

появляется возможность расширить спектр инструментов для анализа топологического заряда и выбрать наиболее успешные для разных типов задач. В общем виде астигматическое преобразование можно представить как $G(x, y) = (x \pm y)^{2t}$ и $G(x, y) = x^{2t} \pm y^{2d}$, где t и d – порядок астигматического преобразования, а знак влияет на угол поворота. Исключением является $x^2 + y^2$ – сферическая aberrация.

Астигматические преобразования, которые представляют собой суперпозиции радиально симметричных полиномов Цернике и типа $Z_{n, \pm 2}$, позволяют уверенно детектировать топологический заряд вихревого пучка. Среди таких преобразований можно выделить: $G(x, y) = [x^2; y^2; x^2 - y^2; (x - y)^2; (x + y)^2]$ и $G(x, y) = [xy; x^4 - y^4; x^6 - y^6; (x + y)^4; (x + y)^6]$. Таким образом, астигматическое преобразование в общем виде $(x \pm y)^{2t}$ и $x^{2t} \pm y^{2d}$ имеет смысл при $0 \leq t \leq 2$ и $0 \leq d \leq 2$.

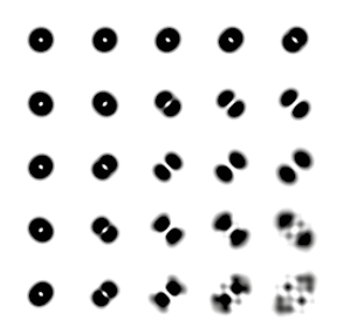
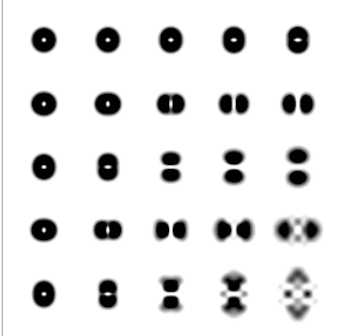
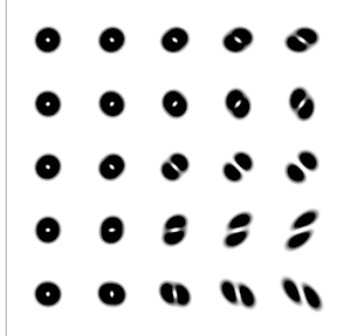
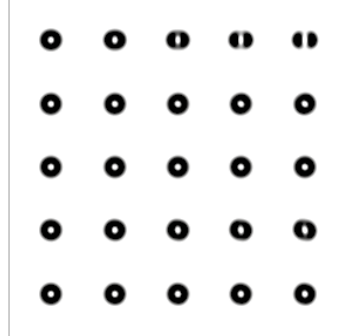
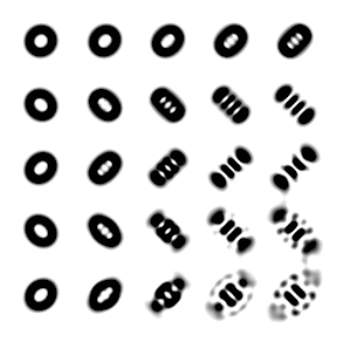
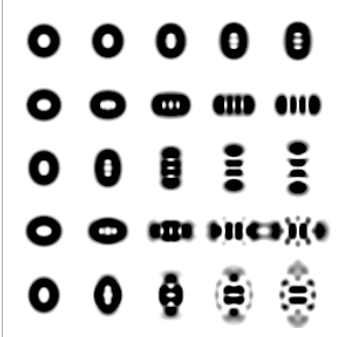
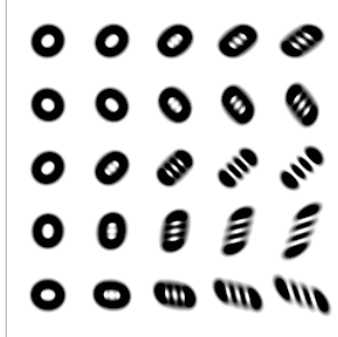
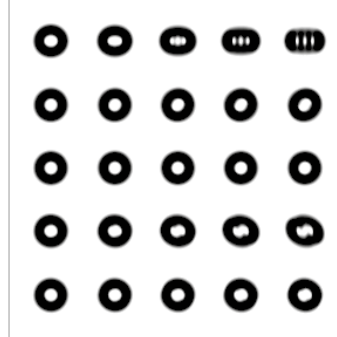
Для верификации предложенных преобразований проведем анализ вихревого пучка вида Гаусса Лагерра с топологическим зарядом $q=1$ и $q=3$. Для удобства представления данных воспользуемся рас-

into the analyzed wavefront. The results of successful detection of the topological charge of a vortex beam of the first and third order using the filters matched to astigmatic wave aberrations are shown.

The possible determination of the topological charge by introducing the astigmatic wave aberrations with various weight coefficients is shown. Moreover, reliable detection can be achieved using the wave aberrations of $Z_{n, \pm 2}$ type at $n \leq 6$ that is partially confirmed by the analytical representation of these aberrations as a superposition of radially symmetric functions and $Z_{n, \pm 2}$ type. In turn, in contrast to the classical method using astigmatic transformations, this method allows to control the band width between the maxima in a specific diffraction order.

The use of astigmatic transformations, represented through the superposition of the radial symmetric and astigmatic-like Zernike polynomials is proposed to expand the range of topological charge analysis tools. $G(x, y) = [xy; x^2; y^2; x^2 - y^2; (x - y)^2; (x + y)^2]$ can be emphasized among the transformations. Thus, a general astigmatic transformation in the form of $(x \pm y)^{2t}$

Таблица 5. Действие фильтра (1), где Z_N заменено на $G(x, y)$ при анализе топологического заряда вихревого пучка
Table 5. Filter action (1), where Z_N is replaced by $G(x, y)$ during analysis of the topological charge of a vortex beam

Действие фильтров $\tau_j(x, y)$ (интенсивность)			
$\tau_1(x, y)$	$\tau_2(x, y)$	$\tau_3(x, y)$	$\tau_4(x, y)$
Действие фильтров $\tau_j(x, y)$ при входном поле $f(x, y) = GL_{01}(x, y, \sigma = 0.15)$			
			
Действие фильтров $\tau_j(x, y)$ при входном поле $f(x, y) = GL_{03}(x, y, \sigma = 0.15)$			
			

считанными фильтрами $\tau_1(x, y)$, $\tau_2(x, y)$, $\tau_3(x, y)$, $\tau_4(x, y)$. Результаты моделирования действие фильтров представлены в табл. 4 и 5.

Из табл. 5 видно, что астигматические преобразования, которые представляют собой суперпозиции радиально симметричных полиномов Цернике и типа $Z_{n, \pm 2}$, позволяют уверенно детектировать топологический заряд вихревого пучка как низкого, так и высокого порядка. Среди преобразований можно выделить $G(x, y) = [xy; x^2; y^2; x^2 - y^2; (x - y)^2; (x + y)^2]$, а среди астигматических aberrаций - полиномы Цернике с радиальным индексом $n \leq 6$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы проведено исследование возможности детектирования и анализа топологического заряда вихревого пучка при помощи внесения aberrаций различного типа и уровня в анализируемый волновой фронт. Показаны результаты успешного детектирования топологического заряда вихревого пучка первого и третьего порядка при помощи фильтров, согласованных с волновыми aberrациями астигматического типа.

and $x^{2t} \pm y^{2d}$ is proposed that makes sense at $0 \leq t \leq 2$ and $0 \leq d \leq 2$. The exception is spherical aberration.

Thus, the proposed method is superior to the classical method of topological charge analysis and can be useful in the analysis of point spread function patterns using the data mining and convolutional neural networks [29–30]. This is due to the fact that in one focal filter plane, the machine learning algorithms can quickly and qualitatively determine both the beam topological charge value, and availability of astigmatic aberration in the original field in the case of reverse problem.

ACKNOWLEDGMENT

This research was funded by the Samara University Development Program for 2021-2030 as part of the Priority 2030 program with the support of the Government of the Samara Region (project No. 31/22B).

AUTHORS

Khorin Pavel Alekseevich, programmer, Research Laboratory of Research Automated Systems, Samara National Research University, Samara, Russia.

ORCID:0000-0002-2248-614X

Khonina Svetlana Nikolaevna, doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher, Research Laboratory of Research Automated Systems, Samara National Research University; Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC «Crystallography and Photonics» RAS, Samara, Russia.



Показана возможность определения топологического заряда при помощи внесения волновых аберраций астигматического типа с разным весовым коэффициентом. Причем уверенное детектирование удастся достигнуть при помощи волновых аберраций типа $Z_{n,\pm 2}$ при $n \leq 6$, что частично подтверждается аналитическим представлением указанных аберраций в виде суперпозиции радиально симметричных функций и типа $Z_{n,\pm 2}$. В свою очередь, данный метод, в отличие от классического способа с использованием астигматических преобразований, позволяет управлять шириной полос между максимумами в конкретном дифракционном порядке.

Предложено использование астигматических преобразований, представленных через суперпозицию радиально симметричных и астигматически подобных полиномов Цернике, для расширения спектра инструментов анализа топологического заряда. Среди преобразований можно выделить $G(x,y) = [xy; x^2; y^2; x^2 - y^2; (x-y)^2; (x+y)^2]$. Таким образом, предложено астигматическое преобразование в общем виде $(x \pm y)^{2t}$ и $x^{2t} \pm y^{2d}$, которое имеет смысл при $0 \leq t \leq 2$ и $0 \leq d \leq 2$. Исключением является $x^2 + y^2$ – сферическая аберрация.

Таким образом, предложенный метод превосходит классический способ анализа топологического заряда и может быть полезен при анализе картин функции рассеяния точки с помощью интеллектуального анализа данных и сверточных нейронных сетей [29–30]. Это обусловлено тем, что в одной фокальной плоскости фильтра алгоритмы машинного обучения могут быстро и качественно определить, как значение топологического заряда пучка, т. к. и в обратной задаче – определить наличие астигматической аберрации в исходной поле.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Самарского университета на 2021–2030 годы в рамках программы «Приоритет-2030» при поддержке Правительства Самарской области (проект № 31/22Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nye J. F., Berry M. V. Dislocations in wave trains. *Proc. of Royal. Soc. A*. 1974;336(1605):165–190. <https://doi.org/10.1098/rspa.1974.0012>.
2. Bazhenov V. Yu., Soskin M. S., Vasnetsov M. V. Screw dislocations in light wavefronts. *J. Mod. Opt.* 1992;39(5): 985–990. <https://doi.org/10.1080/09500349214551011>
3. Allen L., Beijersbergen M. W., Spreeuw R. J. C., Woerdman J. P. Orbital Angular Momentum of Light and the Transformation of Laguerre–Gaussian Laser Modes. *Phys. Rev. A*. 1992;45: 8185–8189. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8185>.
4. Padgett M., Courtial J., Allen L. Light's Orbital Angular Momentum. *Phys. Today*. 2004;57(5): 35–40. <https://doi.org/10.1063/1.1768672>.
5. Gibson G., Courtial J., Padgett M., Vasnetsov M., Pas'ko V., Barnett S., Franke-Arnold S. Free-Space Information Transfer Using Light Beams Carrying Orbital Angular Momentum. *Opt. Express*. 2004;12: 5448–5456. <https://doi.org/10.1364/OPEX.12.005448>.
6. Karpeev S. V., Pavelev V. S., Soifer V. A., Khonina S. N., Duparre M., Leudge B., Turunen J. Transverse mode multiplexing by diffractive optical elements. *Proc. SPIE*. 2005;5854: 1–12.

7. Khonina S. N., Karpeev S. V., Butt M. A. Spatial-light-modulator-based multichannel data transmission by vortex beams of various orders. *Sensors (MDPI)*. 2021;21:2988–(12pp). <https://doi.org/10.3390/s21092988>.
8. Khonina S. N., Kotlyar V., Soifer V., Paakkonen P., Simonen J., Turunen J. An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics. *J. Mod. Opt.* 2001;48: 1543–1557.
9. Berkhout G. C. G., Lavery M. P. J., Courtial J., Beijersbergen M. W., Padgett M. J. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light. *Phys. Rev. Lett.* 2010; 105: 153601.
10. Mirhosseini M., Malik M., Shi Z., Boyd R. W. Efficient separation of the orbital angular momentum eigenstates of light. *Nat. Commun.* 2013;4, 2781.
11. Abramochkin E., Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt. Commun.* 1991;83: 123–135.
12. Beijersbergen M. W., Allen L., H. E. L. O. van der Veen, Woerdman J. P. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Opt. Commun.* 1993;96: 123–132.
13. Hacyan S., Jáuregui R. Evolution of optical phase and polarization vortices in birefringent media. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2009;11(8): 085204.
14. Zusin D. H., Maksimenka R., Filippov V. V., Chulkov R. V., Perdrix M., Gobert O., Grabtchikov A. S. Bessel beam transformation by anisotropic crystals. *Journal of the Optical Society of America A*. 2010;27(8): 1828–1833.
15. Zheng S., Wang J. Measuring Orbital Angular Momentum (OAM) States of Vortex Beams with Annular Gratings. *Sci Rep*. 2017;7, 40781. <https://doi.org/10.1038/srep40781>.
16. Rasouli S., Fathollahzade S., Amiri P. Simple, efficient and reliable characterization of Laguerre-Gaussian beams with non-zero radial indices in diffraction from an amplitude parabolic-line linear grating. *Opt. Express*. 2021;29: 29661–29675.
17. Rasouli S., Amiri P., Kotlyar V., Kovalev A. Characterization of a pair of superposed vortex beams having different winding numbers via diffraction from a quadratic curved-line grating. *Journal of the Optical Society of America B*. 2021;38(8): 2267–2276. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.428390>.
18. Porfirev A. P., Khonina S. N. Experimental investigation of multi-order diffractive optical elements matched with two types of Zernike functions, Proc. SPIE 9807. *Optical Technologies for Telecommunications*. 16–18 November 2015. Ufa, Russian Federation. 2016;98070E–9p. <https://doi.org/10.1117/12.2231378>.
19. Khonina S. N., Karpeev S. V., Porfirev A. P. Wavefront aberration sensor based on a multichannel diffractive optical element. *Sensors (MDPI)*. 2020;20: 3850–(16pp). <https://doi.org/10.3390/s20143850>.
20. Khorin P. A., Soltovskiy S. G., Khonina S. N. Optical detection of values of separate aberrations using a multi-channel filter matched with phase Zernike functions. *Computer Optics*. 2021;45(4):525–533. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-906>.
21. Born M., Wolf E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7th ed. – Cambridge University Press: Cambridge. UK. 1999.
22. Lakshminarayana V., Fleck A. Zernike polynomials: a guide. *Journal of Modern Optics*. 2011;58(7) 545–561.
23. Vinogradova M. B., Rudenko O. V., Suhorukov A. P. *Теория волн*. – М.: Наука. 1979. 384 p. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухорук А. П. *Теория волн*. – М.: Наука. 1979. 384 с.
24. Abramochkin E., Losevsky N., Volostnikov V. Generation of spiral-type laser beams. *Optics Comm.* 1997;141(1–2): 59–64.
25. Kotlyar V. V., Soifer V. A., Khonina S. N. Rotation of multimode Gauss-Laguerre light beams in free space. *Technical Physics Letters*. 1997;23 (9): 657–658.
26. Kogelnik H., Li T. Laser beams and resonators. *Appl. Opt.* 1966;5: 1550–1567.
27. Kotlyar V. V., Khonina S. N., Soifer V. A. Generalized Hermite beams in free space. *Optik*. 1998;108: 20–26.
28. Kotlyar V. V., Kovalev A. A., Porfirev A. P., Kozlova E. S. Three different types of astigmatic Hermite-Gaussian beams with orbital angular momentum. *J. Opt.* 2019; 21: 115601.
29. Rodin I. A., Khonina S. N., Serafimovich P. G., Popov S. B. Recognition of wavefront aberrations types corresponding to single Zernike functions from the pattern of the point spread function in the focal plane using neural networks. *Computer Optics*. 2020;44(6):923–930.
30. Khorin P. A., Dzyuba A. P., Serafimovich P. G., Khonina S. N. Neural networks application to determine the types and magnitude of aberrations from the pattern of the point spread function out of the focal plane. *J. Phys.: Conf. Ser.* V.2021;2086:012148–7pp.

АВТОРЫ

Хорин Павел Алексеевич, программист, Научно-исследовательская лаборатория автоматизированных систем научных исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Россия.

ORCID: 0000-0002-2248-614X

Хонина Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., проф., г. н. с., Научно-исследовательская лаборатория автоматизированных систем научных исследований, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева; ИСОИ РАН – филиал ФИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, г. Самара, Россия.

XXVI МЕЖДУНАРОДНАЯ
ВЫСТАВКА СРЕДСТВ ОБЕСПЕЧЕНИЯ
БЕЗОПАСНОСТИ ГОСУДАРСТВА

ufi
Approved
Event



INTERPOLITEX '22



18—20 ОКТЯБРЯ 2022
МОСКВА, МВЦ «КРОКУС ЭКСПО»

ВТОРОЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФОРУМ
«ИНТЕРПОЛИТЕХ: ЦИФРОВАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ
БЕЗОПАСНОСТИ ГОСУДАРСТВА»



При поддержке



Минцифры
| России

Соорганизатор

СВЯЗИСТ

Проект ОВК «БИЗОН»



ОБЪЕДИНЕНИЕ
ВЫСТАВОЧНЫХ
КОМПАНИЙ

INTERPOLITEX.RU